Représentation des nombres et calcul sur ordinateur

Jean-Michel Muller

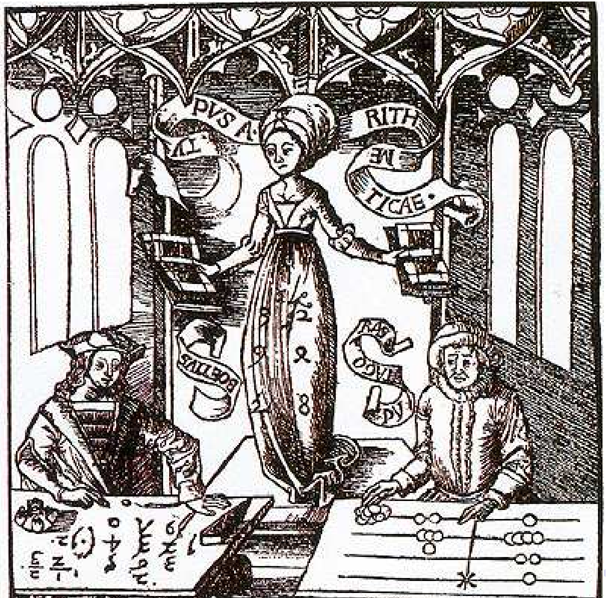
Représentation des nombres et calcul sur ordinateur

des cailloux aux supercalculateurs

Jean-Michel Muller
CNRS - Laboratoire LIP
(CNRS-INRIA-ENS Lyon-Université de Lyon)

http://perso.ens-lyon.fr/jean-michel.muller/

Dame Arithmétique (Gregor Reisch, 1503)



Mon métier ? J'apprends à compter aux ordinateurs

Arithmétique des ordinateurs :

- systèmes de représentation des nombres et méthodes de calculs arithmétiques (faire une addition est encore du domaine de la recherche) ;
- réalisations : programmes etcircuits (processeurs) ;
- critères : vitesse, précision, fiabilité, consommation d'énergie, etc.

$\Rightarrow$ solutions de compromis, qui diffèreront suivant les applications.

Mon métier ? J'apprends à compter aux ordinateurs

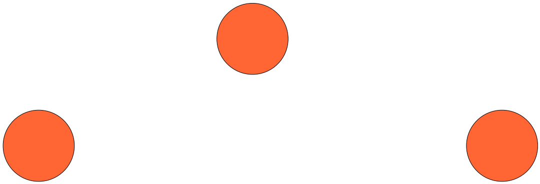
Arithmétique des ordinateurs :

- systèmes de représentation des nombres et méthodes de calculs arithmétiques (faire une addition est encore du domaine de la recherche) ;
- réalisations : programmes etcircuits (processeurs) ;
- critères : vitesse, précision, fiabilité, consommation d'énergie, etc.

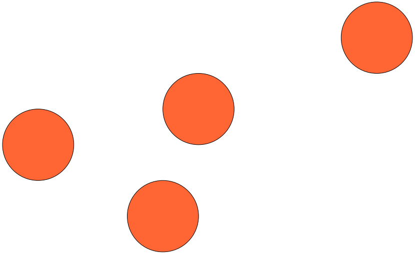
⇒ solutions de compromis, qui diffèreront suivant les applications.

Ce soir : petits allers-retours dans le temps.

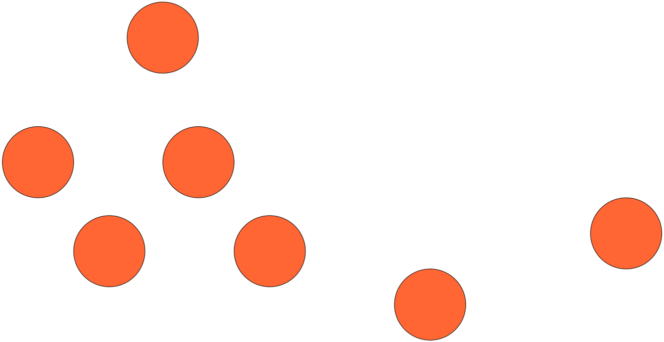
Perception immédiate des petits nombres



Perception immédiate des petits nombres



Perception immédiate des petits nombres



Représentations des nombres $\longrightarrow$ besoins et possibilités

- un, deux, trois, quatre, cinq ..., et pas grand chose de plus

Représentations des nombres $\longrightarrow$ besoins et possibilités

- un, deux, trois, quatre, cinq ..., et pas grand chose de plus
- il y a 6000 ans (Mésopotamie) : systèmes exacts $\longrightarrow$ représentation *exacte* des nombres $\longrightarrow$ mémorisation

Représentations des nombres $\longrightarrow$ besoins et possibilités

- un, deux, trois, quatre, cinq . . . , et pas grand chose de plus
- il y a 6000 ans (Mésopotamie) : systèmes exacts $\longrightarrow$ représentation *exacte* des nombres $\longrightarrow$ mémorisation
- il y a 4000 ans (Mésopotamie) : systèmes de position (sans le zéro) $\longrightarrow$ calcul « à la main » ;

Représentations des nombres → besoins et possibilités

- un, deux, trois, quatre, cinq . . . , et pas grand chose de plus
- il y a 6000 ans (Mésopotamie) : systèmes exacts → représentation *exacte* des nombres → mémorisation
- il y a 4000 ans (Mésopotamie) : systèmes de position (sans le zéro) → calcul « à la main » ;
- notre système de base 10 (Inde → monde musulman → Europe) → calcul « à la main » amélioré ;

Représentations des nombres $\longrightarrow$ besoins et possibilités

- un, deux, trois, quatre, cinq ..., et pas grand chose de plus
- il y a 6000 ans (Mésopotamie) : systèmes exacts $\longrightarrow$ représentation *exacte* des nombres $\longrightarrow$ mémorisation
- il y a 4000 ans (Mésopotamie) : systèmes de position (sans le zéro) $\longrightarrow$ calcul « à la main » ;
- notre système de base 10 (Inde $\longrightarrow$ monde musulman $\longrightarrow$ Europe) $\longrightarrow$ calcul « à la main » amélioré ;
- Question *notre* système est-il adapté au calcul *automatique* ?

Un petit exercice pour s'échauffer

1. Diviser MMCCCXCIII par CLXXXII

Un petit exercice pour s'échauffer

1. Diviser MMCCCXCIII par CLXXXII
2. Généralisation : proposer une méthode générale de division dans ce système.

Attention ! Vous devez vous mettre dans la peau d'un romain, qui n'a aucune idée de ce qu'est notre propre système de numération.

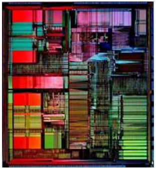
Un petit exercice pour s'échauffer

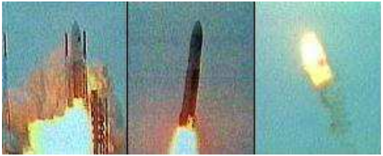
1. Diviser MMCCCXCIII par CLXXXII
2. Généralisation : proposer une méthode générale de division dans ce système.

Attention ! Vous devez vous mettre dans la peau d'un romain, qui n'a aucune idée de ce qu'est notre propre système de numération.

Au moyen-âge, quelqu'un qui sait faire une division est un savant.

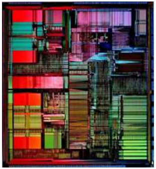
Première partie : le présent

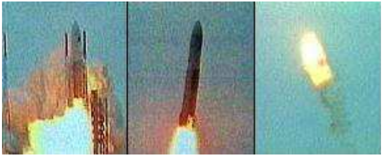




Première partie : le présent

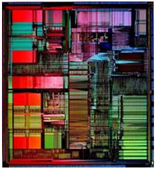
- on ne vit pas dans un monde parfait !

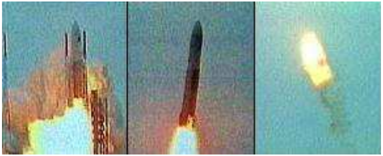




Première partie : le présent

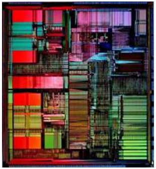
- on ne vit pas dans un monde parfait !
- certes, on fait des calculs impensables il y a 60 ans, mais...

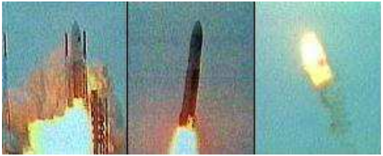




Première partie : le présent

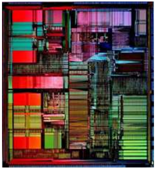
- on ne vit pas dans un monde parfait !
- certes, on fait des calculs impensables il y a 60 ans, mais. . .
- erreurs : programmes et circuits faux, mauvaises "spécifications" ;

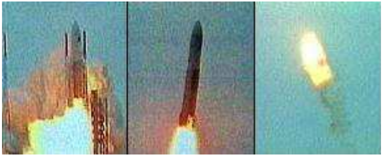




Première partie : le présent

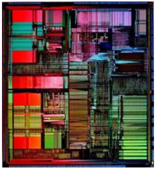
- on ne vit pas dans un monde parfait !
- certes, on fait des calculs impensables il y a 60 ans, mais. . .
- erreurs : programmes et circuits faux, mauvaises "spécifications" ;
- certains problèmes sont intrinsèquement difficiles.





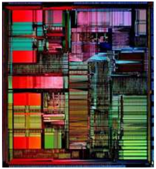
On peut faire du très mauvais travail. . .

- 1994 : “bug” de la division du processeur Pentium d’Intel, 8391667/12582905 donnait $0.666869\cdots$ au lieu de $0.666910\cdots$;



On peut faire du très mauvais travail. . .

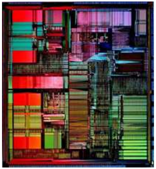
- 1994 : “bug” de la division du processeur Pentium d’Intel, 8391667/12582905 donnait $0.666869\cdots$ au lieu de $0.666910\cdots$;



- Maple, version 6.0. Entrez 214748364810, vous obtiendrez 10.

On peut faire du très mauvais travail...

- 1994 : “bug” de la division du processeur Pentium d’Intel, $8391667/12582905$ donnait $0.666869\cdots$ au lieu de $0.666910\cdots$;



- Maple, version 6.0. Entrez 214748364810, vous obtiendrez 10.
- Excel’2007 (premières versions), calculez $65535 - 2^{-37}$, vous obtiendrez 100000 ;
  Note : 2^{-37} est le nombre qui vaut

$$\frac{1}{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times\cdots\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2}$$

(36 multiplications)

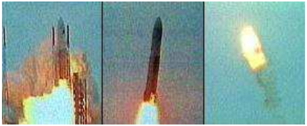
On peut faire du très mauvais travail...

- Novembre 1998, navire américain USS Yorktown, on a par erreur tapé un «zéro» sur un clavier $\longrightarrow$ division par 0. Ce problème n'était pas prévu $\longrightarrow$ cascade d'erreurs $\longrightarrow$ arrêt du système de propulsion.

On peut faire du très mauvais travail...

- Novembre 1998, navire américain USS Yorktown, on a par erreur tapé un «zéro» sur un clavier → division par 0. Ce problème n'était pas prévu → cascade d'erreurs → arrêt du système de propulsion.

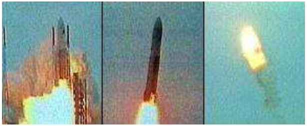
- premier envol... et premier plongeon d'Ariane 5



On peut faire du très mauvais travail...

- Novembre 1998, navire américain USS Yorktown, on a par erreur tapé un «zéro» sur un clavier → division par 0. Ce problème n'était pas prévu → cascade d'erreurs → arrêt du système de propulsion.

- premier envol...et premier plongeon d'Ariane 5



- pont Tacoma (1940), voir vidéo.

On n'a pas besoin d'ordinateurs pour commettre des sottises

- la sonde Mars Climate Orbiter s'est écrasée sur Mars en 1999 ;

On n'a pas besoin d'ordinateurs pour commettre des sottises

- la sonde Mars Climate Orbiter s'est écrasée sur Mars en 1999 ;
- une partie des développeurs des logiciels supposait que l'unité de mesure était le mètre ;

On n'a pas besoin d'ordinateurs pour commettre des sottises

- la sonde Mars Climate Orbiter s'est écrasée sur Mars en 1999 ;
- une partie des développeurs des logiciels supposait que l'unité de mesure était le mètre ;
- l'autre partie croyait que c'était le pied.

Le banquier infernal

Voulant sécuriser ma retraite, j'ai

$$e - 1 = 1.7182818284590452353602874713526624977572470 93\ldots$$

euros à placer. . .

je me rends à la Société chaotique de banque, qui fait de la pub pour de nouveaux placements. . .

Le banquier infernal

À la Société chaotique de banque, le banquier m'explique :

Au bout de 25 ans, je peux retirer mon argent. . . est-ce intéressant ?

Le banquier infernal

À la Société chaotique de banque, le banquier m'explique :

- la première année, mon capital est multiplié par 1, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;

Au bout de 25 ans, je peux retirer mon argent. . . est-ce intéressant ?

Le banquier infernal

À la Société chaotique de banque, le banquier m'explique :

- la première année, mon capital est multiplié par 1, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- la deuxième année, mon capital est multiplié par 2, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;

Au bout de 25 ans, je peux retirer mon argent. . . est-ce intéressant ?

Le banquier infernal

À la Société chaotique de banque, le banquier m'explique :

- la première année, mon capital est multiplié par 1, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- la deuxième année, mon capital est multiplié par 2, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- la troisième année, mon capital est multiplié par 3, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- ...

Au bout de 25 ans, je peux retirer mon argent... est-ce intéressant ?

Le banquier infernal

À la Société chaotique de banque, le banquier m'explique :

- la première année, mon capital est multiplié par 1, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- la deuxième année, mon capital est multiplié par 2, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- la troisième année, mon capital est multiplié par 3, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;
- ...
- la 25ème année, mon capital est multiplié par 25, et on me retire 1 euro pour frais de gestion ;

Au bout de 25 ans, je peux retirer mon argent. . . est-ce intéressant ?

Je n'ai pas signé tout de suite...

J'ai cherché à calculer ce que serait mon capital au bout de 25 ans. . .

Je n'ai pas signé tout de suite...

J'ai cherché à calculer ce que serait mon capital au bout de 25 ans. . .

- ma calculette (Casio) : -747895876335 euros ;

Je n'ai pas signé tout de suite...

J'ai cherché à calculer ce que serait mon capital au bout de 25 ans. . .

- ma calculette (Casio) : -747895876335 euros ;
- mon ordinateur (Proc. Intel Xeon, compilateur gcc, sous Linux) : $+1201807247$ euros ;

Je n'ai pas signé tout de suite...

J'ai cherché à calculer ce que serait mon capital au bout de 25 ans. . .

- ma calculette (Casio) : -747895876335 euros ;
- mon ordinateur (Proc. Intel Xeon, compilateur gcc, sous Linux) : $+1201807247$ euros ;
- en fait, la « vraie » valeur est d'environ 0.0399 euros. . .

Conclusion de ce fâcheux épisode

Conclusion de ce fâcheux épisode

- ne faites pas aveuglément confiance à votre ordinateur ;

Conclusion de ce fâcheux épisode

- ne faites pas aveuglément confiance à votre ordinateur ;
- ne faites pas aveuglément confiance à votre banquier.

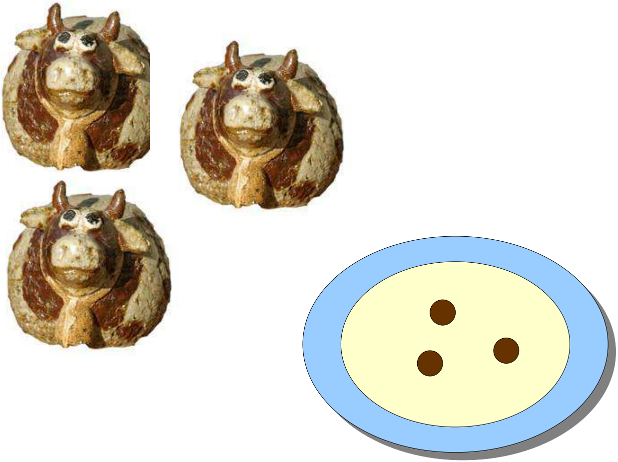
Deuxième partie : Voyage vers le passé. . .

- Guides : Geneviève Guittel, Georges Iffrah, . . .

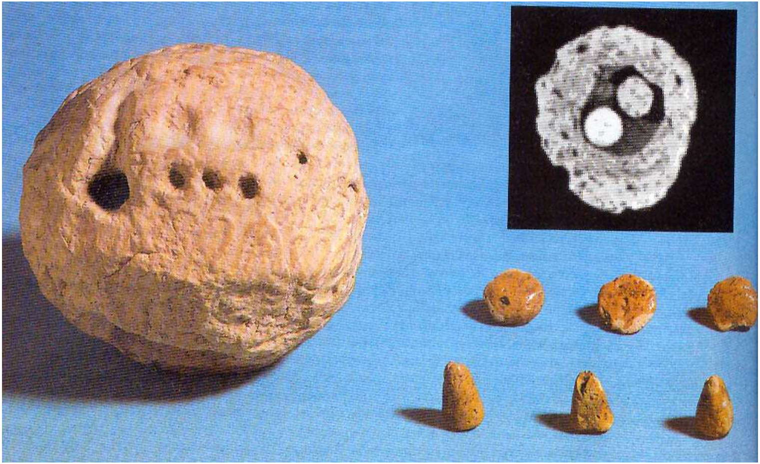
Deuxième partie : Voyage vers le passé. . .

- Guides : Geneviève Guittel, Georges Iffrah, . . .
- Nos ancêtres ont compté avec. . .
  - des cailloux : a donné le mot « calcul » ;
  - leurs doigts : a donné le mot anglais « digit » (chiffre) ;
  - des abaques, des « échiquiers » : a donné l'expression « chancelier de l'échiquier » ;
  - des encoches sur des os ou des bâtons (→ I, V, X des chiffres romains).

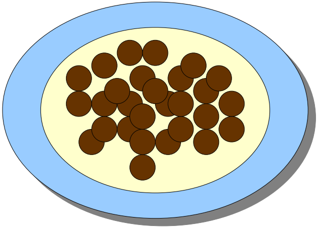
Comptons des têtes de troupeau



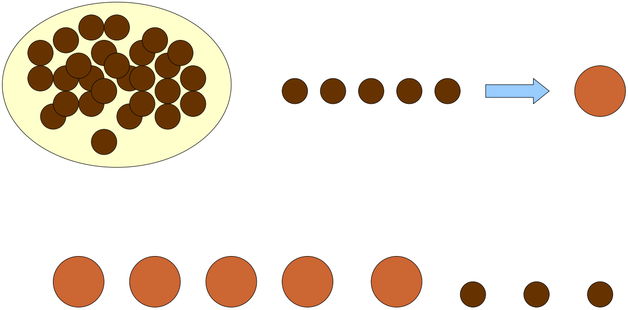
En mésopotamie, il y a 5300 ans. . .



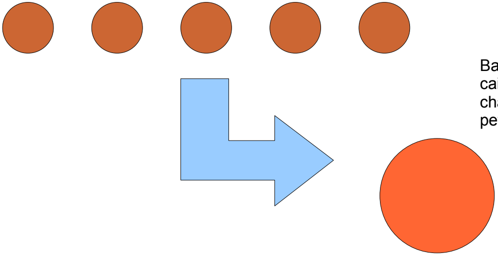
Comptons des têtes de troupeau



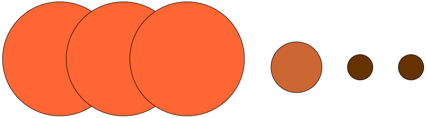
Un gros caillou = 5 cailloux



Un très gros caillou = 5 gros cailloux

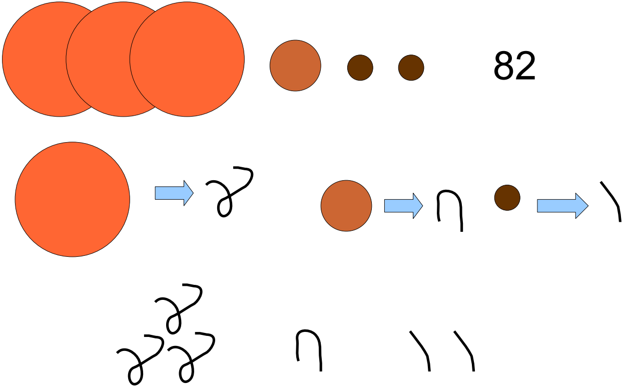


Base 5: chaque très gros caillou vaut 5 gros cailloux, chaque gros caillou vaut 5 petits cailloux.



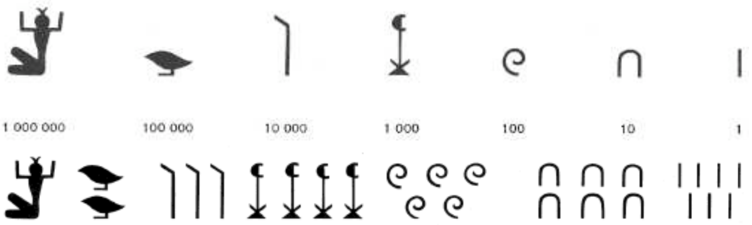
82

Si on sait dessiner, plus besoin de cailloux



En mésopotamie, il y a 4000 ans. . .

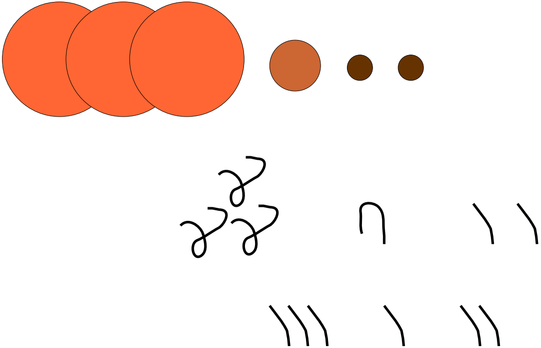
Exemple Egyptien (base 10)



Nombre 1234567

Exemple Egyptien (base 10)

L'étape suivante : numération *de position*



3 1 2

Oui, mais s'il y a un "trou" ?

Si on a juste des très gros et des petits cailloux, sans gros cailloux ?
3 solutions :

Oui, mais s'il y a un "trou" ?

Si on a juste des très gros et des petits cailloux, sans gros cailloux ?
3 solutions :

- une très grande base : la base 60 des savants babyloniens ;

Oui, mais s'il y a un "trou" ?

Si on a juste des très gros et des petits cailloux, sans gros cailloux ?
3 solutions :

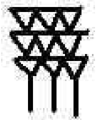
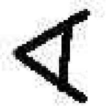
- une très grande base : la base 60 des savants babyloniens ;
- des chiffres qui "tournent" à chaque changement de position : le système savant chinois ;

Oui, mais s'il y a un "trou" ?

Si on a juste des très gros et des petits cailloux, sans gros cailloux ?
3 solutions :

- une très grande base : la base 60 des savants babyloniens ;
- des chiffres qui "tournent" à chaque changement de position : le système savant chinois ;
- Zéro : inventer un symbole pour représenter. . . rien !

Le système de base 60 des savants babyloniens

- choix d'une grande base : absence de zéro ;
- 58 tables de multiplication !
- chaque chiffre (de 1 à 59), représenté à l'aide de 2 symboles (clous et chevrons) :
  -  chaque clou vaut 1
  -  le chevron vaut 10

Le système de base 60 des savants babyloniens

- "tablette de Yale" : entre -2000 et -1600 ;

Le système de base 60 des savants babyloniens

- "tablette de Yale" : entre -2000 et -1600 ;
- $\sqrt{2}$ en base 60, avec une précision de 4 chiffres de base 60 $\approx$ 7 chiffres de base 10 ;

Le système de base 60 des savants babyloniens

- "tablette de Yale" : entre -2000 et -1600 ;
- $\sqrt{2}$ en base 60, avec une précision de 4 chiffres de base 60 $\approx$ 7 chiffres de base 10 ;
- méthode de racine carrée : communément attribuée à Héron d'Alexandrie (env. 10 – env. 75), voire à Newton ;

Le système de base 60 des savants babyloniens

- "tablette de Yale" : entre -2000 et -1600 ;
- $\sqrt{2}$ en base 60, avec une précision de 4 chiffres de base 60 $\approx$ 7 chiffres de base 10 ;
- méthode de racine carrée : communément attribuée à Héron d'Alexandrie (env. 10 – env. 75), voire à Newton ;
- notre mesure du temps.

Le système de base 60 des savants babyloniens

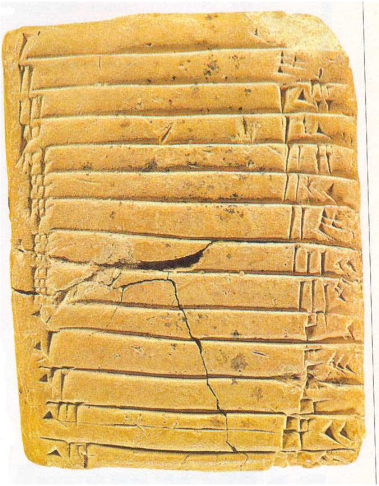
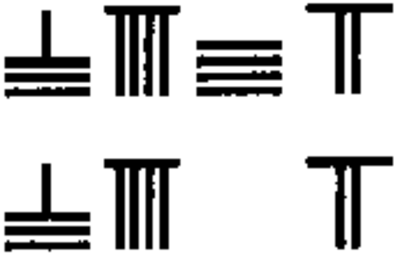


Table de multiplication par 25.

Le système savant chinois

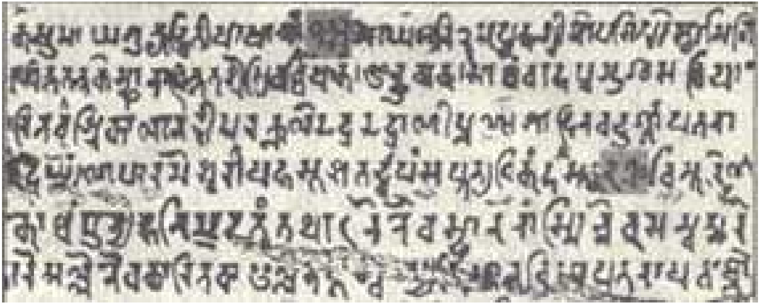
- unités, centaines, dizaines de milliers,etc. : chiffres verticaux ;
- dizaines, milliers, etc. : chiffres horizontaux.

8947 et 8907 :



Notre numération de base 10 avec zéro explicite

- Inde, 8ème siècle au + tard (et peut-être Chine avant) ;
- Utilisation certaine et datable : stèle de Gwalior, +876 ;
- traité d'arithmétique d'Al-Khwarizmi.



Mohamed Ibn Mussa Al-Khawarizmi

- Mathématicien et astronome perse 783 – 850,
- *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul indien* (825) : utilise et perfectionne le système indien ;
- équations du second degré, dans son livre *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala* → a donné le mot algèbre ;
- son nom a donné le mot algorithme.

En europe. . . il faut attendre la renaissance

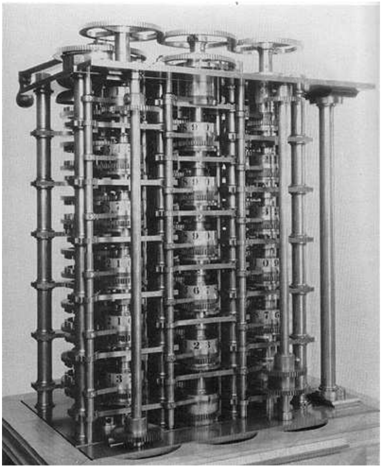
- Gerbert d'Aurillac : 990, mais pas de réelle percée avant la renaissance ;
- Algorisme : nom donné à ce systèmes de numération et aux méthodes (algorithmes) de calcul ;
- essor des sciences.

Le calcul automatique : Pascal, Leibniz, . . .

La Machine de Pascal (1645).

L'*arithmomètre* de Thomas de Colmar (1820) : 4 opérations arithmétiques. Première machine diffusée à large échelle.

Le calcul automatique : Pascal, Leibniz, . . .



La *Difference engine no* 2 de Charles Babbage : construction automatisée de tables de fonctions.

Troisième partie : retour au présent

- un record ;
- quels besoins ?
- ré-apprenons l'addition. . .

Le record ?

Y. Kanada, de l'université de Tokyo, a calculé les 1.241.100.000.000 premiers chiffres décimaux de π, en utilisant les relations

$$\begin{aligned} \pi &= 48 \arctan \tfrac{1}{49} + 128 \arctan \tfrac{1}{57} - 20 \arctan \tfrac{1}{239} + 48 \arctan \tfrac{1}{110443} \\ \pi &= 176 \arctan \tfrac{1}{57} + 28 \arctan \tfrac{1}{239} - 48 \arctan \tfrac{1}{682} + 96 \arctan \tfrac{1}{12943}. \end{aligned}$$

A demandé 600 heures de calcul sur un calculateur parallèle Hitachi à 64 processeurs. Mémoire nécessaire : 4000 fois celle de mon ordinateur portable.

Besoins ? Quelques chiffres...

- dynamique :

$$\frac{\text{Diamètre estimé Univers observable}}{\text{Longueur de Planck}} \approx 10^{62}$$

(un "1" suivi de 62 zéros)

Besoins ? Quelques chiffres. . .

- dynamique :

$$\frac{\text{Diamètre estimé Univers observable}}{\text{Longueur de Planck}} \approx 10^{62}$$

(un "1" suivi de 62 zéros)

- précision : certaines prédictions de la mécanique quantique et de la relativité générale vérifiées avec erreur (relative) $\approx 10^{-14} = 0.00000000000001$

Besoins ? Quelques chiffres. . .

- dynamique :

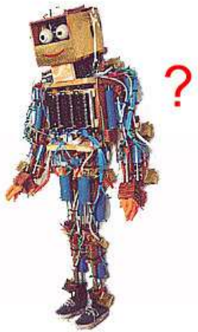
$$\frac{\text{Diamètre estimé Univers observable}}{\text{Longueur de Planck}} \approx 10^{62}$$

(un "1" suivi de 62 zéros)

- précision : certaines prédictions de la mécanique quantique et de la relativité générale vérifiées avec erreur (relative) $\approx 10^{-14} = 0.00000000000001$
- calculs intermédiaires : arithmétique très précise et algorithmes sophistiqués pour la stabilité à trèèèès long terme du système solaire
(J. Laskar, Observatoire de Paris).

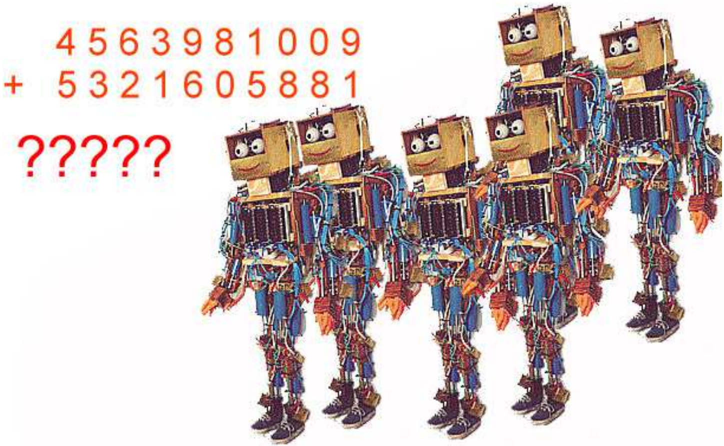
Réapprenons l'addition

```
   4 5 6 3 9 8 1 0 0 9
+  5 3 2 1 6 0 5 8 8 1
```



Situation « habituelle » : un seul opérateur, qui travaille de droite à gauche.

Réapprenons l'addition



On ne peut pas pleinement profiter du fait qu'il y a plusieurs opérateurs.

Une addition

	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1

Une addition

					1	
	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1
						0

Une addition

				1		
	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1
					0	0

Une addition

	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1
				2	0	0

Une addition

	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1
			9	2	0	0

Une addition

	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1
		9	9	2	0	0

Une addition

	2	4	1	0	6	9
+	3	5	8	1	3	1
	5	9	9	2	0	0

Faire des additions rapidement ?

- je ne peux pas ajouter deux chiffres tant que je ne sais pas si la somme des deux chiffres précédents a produit une retenue ;

Faire des additions rapidement ?

- je ne peux pas ajouter deux chiffres tant que je ne sais pas si la somme des deux chiffres précédents a produit une retenue ;
- cette même somme des deux chiffres précédents ne peut être faite tant qu'on ne sait pas si les deux chiffres d'avant ont produit une retenue, etc.

Faire des additions rapidement ?

- je ne peux pas ajouter deux chiffres tant que je ne sais pas si la somme des deux chiffres précédents a produit une retenue ;
- cette même somme des deux chiffres précédents ne peut être faite tant qu'on ne sait pas si les deux chiffres d'avant ont produit une retenue, etc.
- procédé "séquentiel", de droite à gauche $\rightarrow$ temps de calcul proportionnel à la taille de l'écriture des nombres additionnés ;

Faire des additions rapidement ?

- je ne peux pas ajouter deux chiffres tant que je ne sais pas si la somme des deux chiffres précédents a produit une retenue ;
- cette même somme des deux chiffres précédents ne peut être faite tant qu'on ne sait pas si les deux chiffres d'avant ont produit une retenue, etc.
- procédé "séquentiel", de droite à gauche $\rightarrow$ temps de calcul proportionnel à la taille de l'écriture des nombres additionnés ;
- moi, ça ne me gène pas, mais un circuit d'ordinateur. . .

La propagation des retenues

	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1

La propagation des retenues

					1	
	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1
						0

La propagation des retenues

				1		
	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1
					0	0

La propagation des retenues

			1			
	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1
				0	0	0

La propagation des retenues

		1				
	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1
			0	0	0	0

La propagation des retenues

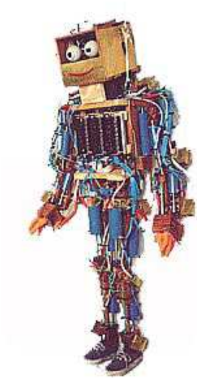
	1					
	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1
		0	0	0	0	0

La propagation des retenues

	2	4	1	8	6	9
+	7	5	8	1	3	1
1	0	0	0	0	0	0

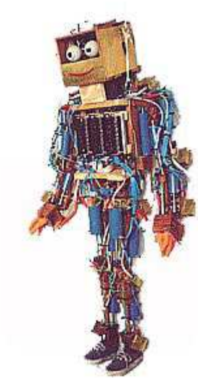
Première solution : couper en deux le nombre

$$\begin{array}{rr} & 154554774088747445877448 \\ + & 132555225458588779657401 \end{array}$$

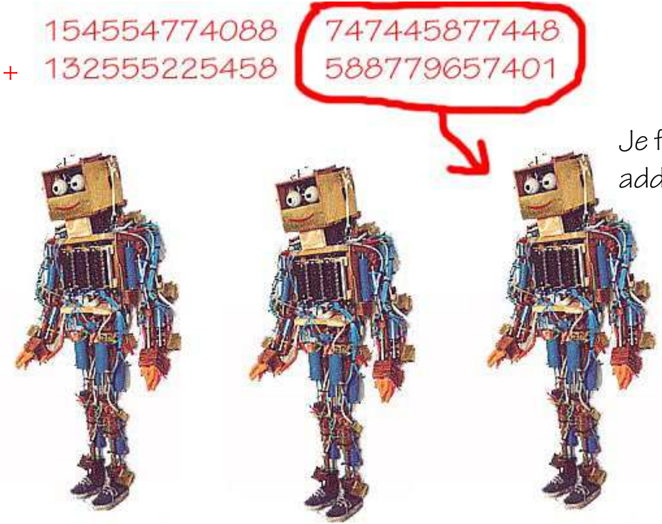


Première solution : couper en deux le nombre

	154554774088	747445877448
+	132555225458	588779657401

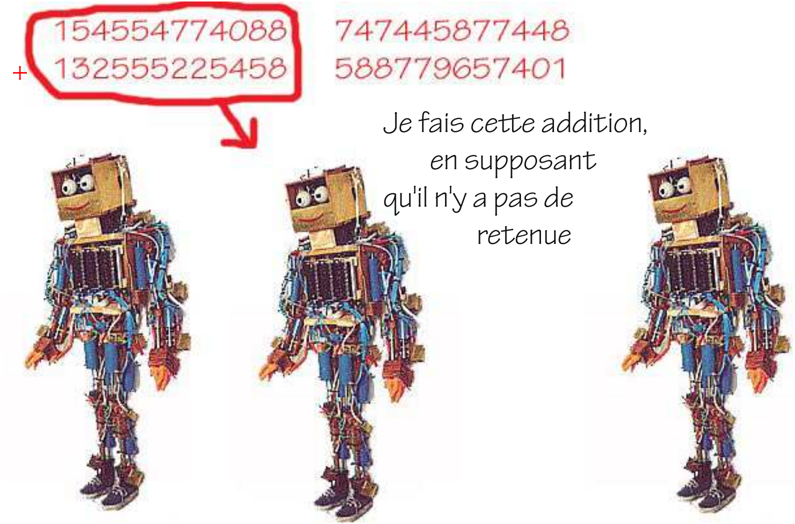




Première solution : couper en deux le nombre



Je fais cette addition

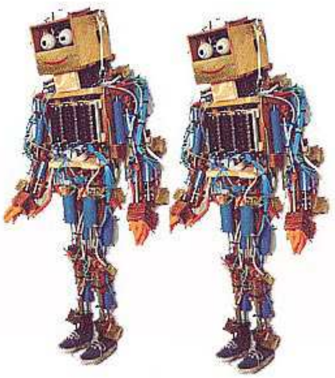
Première solution : couper en deux le nombre



Première solution : couper en deux le nombre

$$
\begin{array}{rr}
 & 154554774088 \\
+ & 132555225458
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
747445877448 \\
588779657401
\end{array}
$$

Je fais cette addition en supposant qu'il y a une retenue



Continuer ainsi de suite...

- si T_n est le temps mis pour additionner deux nombres de n chiffres,

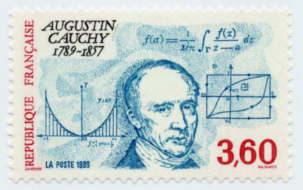
$$T_n = T_{n/2} + C;$$

- on peut encore couper en deux chacune des moitiés de nombres ;
- temps proportionnel au nombre d'étapes que l'on met, en divisant à chaque fois n par deux, pour arriver à 1 :

$$64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

  Ce nombre d'étapes est le logarithme à base 2 de n.
- faire mieux : Changer la manière de représenter les nombres.

Systèmes de numération “redondants”



- Cauchy (1840) : utiliser, en base 10, les chiffres allant de -5 à $+5$ (but : simplifier légèrement les multiplications) ;
- Avizienis (1961) : base 10 et chiffres allant de -6 à $+6$: plus besoin de propager de retenues ;

Systèmes de numération “redondants”

A. Avizienis, 1961 : base 10, chiffres $-6, -5, -4, \ldots, 5, 6$.

La chaîne de chiffres $x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$ représente

$$(100000 \times x_5) + (10000 \times x_4) + (1000 \times x_3) \\ + (100 \times x_2) + (10 \times x_1) + x_0.$$

Des nombres ont *plusieurs* représentations : système redondant

Ex. 2006 s'écrit 2006 ou $201(-4)$.

Addition sans propagation de retenue (Avizienis)

$s = x + y$

1. Calculer pour $i = 0 \ldots n - 1$:

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_i + y_i \leq -6 \\ 0 & \text{si} \quad -5 \leq x_i + y_i \leq 5 \\ 1 & \text{si} \quad x_i + y_i \geq 6 \end{cases} \\
w_i &= x_i + y_i - 10t_{i+1}
\end{aligned}
$$

2. Calculer pour $i = 0 \ldots n$: $s_i = w_i + t_i$, avec $w_n = t_0 = 0$.

Exemple

x_i	1	$\bar{2}$	5	3	$\bar{4}$
y_i	3	5	1	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$x_i + y_i$					
t_{i+1}					
w_i					
s_i					

Écritures usuelles : $1\bar{2}53\bar{4} = 8526$, $351\overline{56} = 35044$. Somme 43570.

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_i + y_i \leq -6 \\ 0 & \text{si} \quad -5 \leq x_i + y_i \leq 5 \\ 1 & \text{si} \quad x_i + y_i \geq 6 \end{cases} \\
w_i &= x_i + y_i - 10t_{i+1}
\end{aligned}
$$

et $s_i = w_i + t_i$, avec $w_n = t_0 = 0$.

Exemple

x_i	1	$\overline{2}$	5	3	$\overline{4}$
y_i	3	5	1	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$x_i + y_i$	4	3	6	-2	-10
t_{i+1}					
w_i					
s_i					

Écritures usuelles : $1\overline{2}53\overline{4} = 8526$, $351\overline{5}\overline{6} = 35044$. Somme 43570.

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_i + y_i \leq -6 \\ 0 & \text{si} \quad -5 \leq x_i + y_i \leq 5 \\ 1 & \text{si} \quad x_i + y_i \geq 6 \end{cases} \\
w_i &= x_i + y_i - 10 t_{i+1}
\end{aligned}
$$

et $s_i = w_i + t_i$, avec $w_n = t_0 = 0$.

Exemple

x_i	1	$\overline{2}$	5	3	$\overline{4}$
y_i	3	5	1	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$x_i + y_i$	4	3	6	-2	-10
t_{i+1}	0	0	1	0	-1
w_i					
s_i					

Écritures usuelles : $1\overline{2}53\overline{4} = 8526$, $351\overline{56} = 35044$. Somme 43570.

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_i + y_i \leq -6 \\ 0 & \text{si} \quad -5 \leq x_i + y_i \leq 5 \\ 1 & \text{si} \quad x_i + y_i \geq 6 \end{cases} \\
w_i &= x_i + y_i - 10 t_{i+1}
\end{aligned}
$$

et $s_i = w_i + t_i$, avec $w_n = t_0 = 0$.

Exemple

x_i	1	$\overline{2}$	5	3	$\overline{4}$
y_i	3	5	1	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$x_i + y_i$	4	3	6	-2	-10
t_{i+1}	0	0	1	0	-1
w_i	4	3	-4	-2	0
s_i					

Écritures usuelles : $1\overline{2}53\overline{4} = 8526$, $351\overline{5}\overline{6} = 35044$. Somme 43570.

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_i + y_i \leq -6 \\ 0 & \text{si} \quad -5 \leq x_i + y_i \leq 5 \\ 1 & \text{si} \quad x_i + y_i \geq 6 \end{cases} \\
w_i &= x_i + y_i - 10 t_{i+1}
\end{aligned}
$$

et $s_i = w_i + t_i$, avec $w_n = t_0 = 0$.

Exemple

x_i	1	$\overline{2}$	5	3	$\overline{4}$
y_i	3	5	1	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$x_i + y_i$	4	3	6	-2	-10
t_{i+1}	0	0	1	0	-1
w_i	4	3	-4	-2	0
s_i	4	4	-4	-3	0

Écritures usuelles : $1\overline{2}53\overline{4} = 8526$, $351\overline{5}\overline{6} = 35044$. Somme 43570.

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_i + y_i \leq -6 \\ 0 & \text{si} \quad -5 \leq x_i + y_i \leq 5 \\ 1 & \text{si} \quad x_i + y_i \geq 6 \end{cases} \\
w_i &= x_i + y_i - 10 t_{i+1}
\end{aligned}
$$

et $s_i = w_i + t_i$, avec $w_n = t_0 = 0$.

Questions, discussion. . .